

**В.И. ГОРБАЧЕНКО, М.М. АЛКЕЗУИНИ**

Пензенский государственный университет  
gorvi@mail.ru

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ**

Моделями объектов с распределенными параметрами являются краевые задачи, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Перспективным направлением являются бессеточные методы решения таких задач на сетях радиальных базисных функций. Широко используемый для обучения сетей метод градиентного спуска не обеспечивает высокой скорости обучения и точности решения. Быстрый метод второго порядка — метод доверительных областей является весьма сложным. Разработан алгоритм обучения сети на основе быстрого метода первого порядка — метода Нестерова. Предложен, реализован и исследован алгоритм обучения на основе метода Левенберга-Марквардта. Предложенный алгоритм при более простой реализации показал соизмеримые результаты по сравнению с методом доверительных областей.

Models of objects with distributed parameters are boundary value problems described by partial differential equations. A promising direction is meshless methods for solving such problems on radial basis function networks. The gradient descent method, widely used for learning networks, does not provide high learning speed and accuracy of the solution. A fast second-order method — trust regions method is very complex. An algorithm for learning the network based on the fast first-order method - the Nesterov method is developed. A learning algorithm based on the Levenberg-Marquardt method is proposed, implemented, and investigated. The proposed algorithm with a simpler implementation showed comparable results in comparison with the method of confidence areas.

**Ключевые слова:** краевые задачи, уравнения с частными производными, сети радиальных базисных функций, обучение нейронных сетей, метод Нестерова, метод Левенберга-Марквардта

Решение численными методами краевых задач (КР) для дифференциальных уравнений в частных производных, являющихся моделями объектов с распределенными параметрами, обычно производится сеточными методами конечных разностей или конечных элементов. Сеточные мето-

ды требуют генерации сеток, что для реальных задач является сложной задачей, и решения плохо обусловленных систем алгебраических уравнений высокой размерности. Альтернативой сеточным методам являются бессеточные методы. Перспективной является реализация бессеточных методов на нейронных сетях [1]. Решение КЗ на нейронных сетях представляет собой нейросетевую аппроксимацию неизвестного решения задачи. Особенно перспективно применение специального вида нейронных сетей — сетей радиальных базисных функций (РБФ-сетей), содержащих всего два слоя, один из которых является линейным. Применение РБФ-сетей является развитием проекционных методов на основе радиальных базисных функций (РБФ). В отличие от использования РБФ, применение РБФ-сетей позволяет находить не только веса, но и параметры базисных функций. Применение РБФ-сетей дает приближенное аналитическое решение задачи в произвольных точках области решения.

Решение задачи формируется в процессе обучения РБФ-сети. Поэтому важно сокращение времени обучения сетей. В настоящее время для обучения РБФ-сетей при решении краевых задач используется, в основном, метод градиентного спуска. Быстрые методы второго порядка практически не используются при решении краевых задач на РБФ-сетях. Исключение представляет предложенный в [2–3] метод доверительных областей. Но метод весьма сложен, так как требует на каждой итерации решения задачи условной минимизации. В данной работе предложены, реализованы и исследованы алгоритмы обучения РБФ-сетей на основе ускоренного метода Нестерова и метода Левенберга-Марквардта. Алгоритмы отличаются аналитическим вычислением вектора градиента и матрицы Якоби.

Алгоритм метод Левенберга-Марквардта при решении модельной задачи показал практически одинаковые результаты по сравнению с методом доверительных областей [2], но его реализация проще.

#### *Список литературы*

1. Yadav N., Yadav A., Kumar M. An Introduction to Neural Network Methods for Differential Equations. Springer, 2015. — 115 p.
2. Горбаченко В. И., Жуков М. В. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017, Том 57.— № 1. — С.115–126.
3. Alqezweeni M. M., Gorbachenko V. I., Zhukov M. V., Jaafar M. S. Efficient Solving of Boundary Value Problems Using Radial Basis Function Networks Learned by Trust Region Method // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — Vol. 2018, Article ID 9457578, 4 pages, 2018.